

文章编号: 1000-8055(2007)12-2055-07

Fourier 伪谱方法在不可压缩平板边界层研究中的应用

李 宁¹, 罗纪生^{1,2}

(1. 天津大学 力学系, 天津 300072; 2. 南开大学 天津大学 刘徽应用数学中心, 天津 300072)

摘 要: 以三维不可压缩平板边界层为研究对象, 扰动形式 N-S 方程为控制方程, 从空间模式的角度, 直接数值模拟了三维不稳定 T-S 波传播的过程. 时间离散采用三阶精度混合显隐分裂格式, 空间离散则结合 Fourier 伪谱方法及高精度紧致有限差分逼近, 法向采用非等间距网格坐标变换, 出口边界条件采用嵌边函数法, 程序采用 MPI(Message passing interface) 并行方法编写. 实例验证, 该方法计算结果与流动稳定性分析的结果一致.

关 键 词: 不可压缩边界层; Fourier 伪谱方法; 紧致有限差分; 直接数值模拟 (DNS)

中图分类号: O357

文献标识码: A

Application of fourier pseudo-spectral method in the incompressible boundary layer on a flat plate

LI Ning¹, LUO Ji-sheng^{1,2}

(1. Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, China;

2. LIU Hui Center of Applied Mathematics,

Nankai University and Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: Three-dimensional incompressible boundary layer on a flat plate was studied where disturbance N-S equation was taken as governing equation. The evolution of three-dimensional instability T-S wave was simulated by spatial DNS(direct numerical simulation) in which third-order precision mixed explicit-implicit scheme was employed for temporal discretization while a method combining Fourier pseudo-spectral method with high precision compact finite difference was implemented for spatial discretization. A coordinate transform of nonuniform meshes was applied in normal direction, fringe method was adopted as exit boundary condition and MPI method was used in programming. Through a simple case, the results obtained by this method were tested to be in consistence with the ones obtained with stability theory.

Key words: incompressible boundary layer; Fourier pseudo-spectral method; compact finite difference; DNS (direct numerical simulation)

转捩及湍流问题一直是流体力学研究的热 点,以边界层湍流为代表的壁湍流又是工程和自

收稿日期: 2006-11-30; 修订日期: 2007-05-27

基金项目: 国家自然科学基金项目(10632050)

作者简介: 李宁(1978-), 男, 辽宁复县人, 博士生, 主要研究方向为流动稳定性.

罗纪生(1954-), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为流动稳定性.

自然界中最常见的湍流状态^[1-5]. 计算流体力学的发展,为湍流和转捩问题的研究提供了直接数值模拟这一有力的手段^[6]. 目前,关于壁湍流的直接数值模拟多采用时间模式,即假设流动沿流向具有周期性,通过流动的时间的演化来模拟转捩过程. 而对于平板边界层,由于边界层厚度沿流向变化,再采用时间模式来研究就不够准确了. 在计算机水平日新月异的今天,超大型计算已经不再是难题,对边界层的研究应该采用空间模式.

谱方法是计算流体力学的主要方法之一,其应用范围可以涉及到各种流体力学问题. 谱方法中的 Fourier 伪谱 (Pseudo-spectral) 方法适用于展开方程时的非线性项的处理,其特点为:用较少的网格点可以得到较高的精度,无相位误差,适用于多尺度的波动性问题.

本文提出一种 Fourier 伪谱方法和高精度紧致有限差分相结合的方法,采用空间模式,对三维不可压缩平板边界层进行研究.

1 控制方程

考虑平板边界层,设流体沿平板流动的方向为 x ,法向为 y ,展向为 z . u, v, w 分别为 x, y, z 方向的速度. 本文的计算域及坐标选取如图 1 所示.

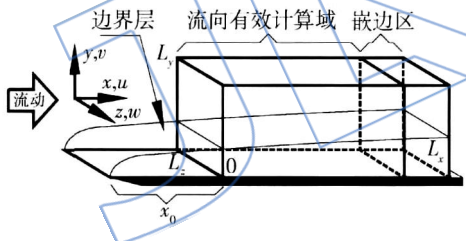


图 1 计算域示意图

Fig. 1 Schematic diagram of computational domain

流向、展向和法向的计算域长度分别为 L_x, L_y, L_z , 因此,计算域的范围为: $0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq L_z$. x_0 为计算域的入口位置.

本文使用的控制方程,是由不可压缩流体 Navier-Stokes (N-S) 方程所导出的三维无量纲扰动方程. 用自由来流速度 U_∞ 作为特征速度,计算域入口处的边界层排移厚度 δ^* 作为特征长度,流体密度 ρ 作为特征密度,相应的,时间量用 δ^* / U_∞ 作为特征尺度,压力用 ρU_∞^2 作为特征尺度,无量纲化的 N-S 方程为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \end{cases} \quad (1)$$

其中,速度 $\mathbf{u} = (u, v, w)$, p 为压力,雷诺数 $Re = U_\infty \cdot \delta^* / \nu$, ν 为运动粘性系数,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right).$$

将方程式(1)中的瞬时速度、瞬时压力都分解为基本流与扰动量两部分之和

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}' \quad (2)$$

$$p = P + p' \quad (3)$$

其中, $\mathbf{U}, P$ 表示基本流项.

本文基本流为二维层流 Blasius 相似性解,因此 $\mathbf{U} = (U, V, 0)$, $\mathbf{u}', p'$ 表示扰动量. 将式(2)、式(3)代入方程式(1),减去基本流满足的 N-S 方程,得到物理空间的扰动方程为(简便起见,省略扰动量的上标符号“'”)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial U}{\partial y} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial V}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v \\ \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} + V \frac{\partial w}{\partial y} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 w \end{cases} \quad (4)$$

本文在 z 方向使用伪谱方法,将函数在 z 方向展开为 Fourier 级数,在谱空间进行求解. 对于关心的速度、压力等量,可以通过快速 Fourier 变换,在谱空间和物理空间进行变换.

设流场中的任一物理量 ϕ 可以写为

$$\phi(x, y, z, t) = \sum_{m=1}^{M/2-1} \Phi_m(x, y, t) e^{im\beta z} \quad (5)$$

其中, β 为 z 方向的波数. $m = 1 - M/2, \dots, 0, \dots, M/2 - 1$, M 为展向截断误差的项数. 上标“ $\wedge$ ”表示函数在谱空间的分量.

对扰动方程式(4)进行 Fourier 变换,由于 Fourier 基函数具有正交性,得到谱空间的扰动方程为

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \hat{u}_m}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}_m}{\partial y} + im\beta_0 \hat{w}_m = 0 \\ &\frac{\partial \hat{u}_m}{\partial t} + U \frac{\partial \hat{u}_m}{\partial x} + \hat{u}_m \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial \hat{u}_m}{\partial y} + \hat{v}_m \frac{\partial U}{\partial y} + \\ &\left[u \frac{\partial U}{\partial x} \right]_m + \left[v \frac{\partial U}{\partial y} \right]_m + \left[w \frac{\partial U}{\partial z} \right]_m = \\ &- \frac{\partial \hat{p}_m}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_m}{\partial y^2} - m^2 \beta_0 \hat{u}_m \right) \\ &\frac{\partial \hat{v}_m}{\partial t} + U \frac{\partial \hat{v}_m}{\partial x} + \hat{u}_m \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial \hat{v}_m}{\partial y} + \hat{v}_m \frac{\partial V}{\partial y} + \\ &\left[u \frac{\partial V}{\partial x} \right]_m + \left[v \frac{\partial V}{\partial y} \right]_m + \left[w \frac{\partial V}{\partial z} \right]_m = \\ &- \frac{\partial \hat{p}_m}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \hat{v}_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}_m}{\partial y^2} - m^2 \beta_0 \hat{v}_m \right) \\ &\frac{\partial \hat{w}_m}{\partial t} + U \frac{\partial \hat{w}_m}{\partial x} + V \frac{\partial \hat{w}_m}{\partial y} + \left[u \frac{\partial W}{\partial x} \right]_m + \\ &\left[v \frac{\partial W}{\partial y} \right]_m + \left[w \frac{\partial W}{\partial z} \right]_m = - im\beta_0 \hat{p}_m + \\ &\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \hat{w}_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}_m}{\partial y^2} - m^2 \beta_0 \hat{w}_m \right) \end{aligned}\right. \quad (6)$$

本文的计算采用空间模式,为了便于计算收敛,在出口采用嵌边函数(fringe function)法,嵌边函数 $\lambda(x, t)$ 的选取将在 2.2.6 节具体介绍.经嵌边函数修正过的扰动方程为

$$\left\{\begin{aligned} &m \cdot \hat{u}_m = 0 \\ &\frac{\partial \hat{u}_m}{\partial t} + F_m = - \frac{m \hat{p}_m}{\nabla} + \frac{1}{Re} \frac{m^2 \hat{u}_m}{\nabla} + \\ &\lambda(x, t) (\hat{u}_e - \hat{u}_m) \end{aligned}\right. \quad (7)$$

其中 F_m 表示谱空间中的对流项, $F_m = D_m + N_m$, D_m 表示扰动的线性项, N_m 表示扰动的非线性项, 即

$$\begin{aligned} D_m &= \begin{cases} U \frac{\partial \hat{u}_m}{\partial x} + \hat{u}_m \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial \hat{u}_m}{\partial y} + \hat{v}_m \frac{\partial U}{\partial y} \\ U \frac{\partial \hat{v}_m}{\partial x} + \hat{u}_m \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial \hat{v}_m}{\partial y} + \hat{v}_m \frac{\partial V}{\partial y} \\ U \frac{\partial \hat{w}_m}{\partial x} + V \frac{\partial \hat{w}_m}{\partial y} \end{cases} \\ N_m &= \begin{cases} \left[u \frac{\partial U}{\partial x} \right]_m + \left[v \frac{\partial U}{\partial y} \right]_m + \left[w \frac{\partial U}{\partial z} \right]_m \\ \left[u \frac{\partial V}{\partial x} \right]_m + \left[v \frac{\partial V}{\partial y} \right]_m + \left[w \frac{\partial V}{\partial z} \right]_m \\ \left[u \frac{\partial W}{\partial x} \right]_m + \left[v \frac{\partial W}{\partial y} \right]_m + \left[w \frac{\partial W}{\partial z} \right]_m \end{cases} \\ m &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, im\beta_0 \right) \end{aligned}$$

$\frac{m^2}{\nabla} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - m^2 \beta_0 \right)$.
 $\hat{u}_e$ 为预先指定的嵌边区出流条件,由于是扰动方程,因此取 $\hat{u}_e = 0$.

方程(7)就是本文数值模拟所要求解的谱空间的扰动方程.

2 数值方法

2.1 时间的离散

对于时间上的离散,采用 Karniadakis. G. E., Israeli. M 和 Orszag. S. A. ^[7] 建议的混合显-隐相结合的分裂格式,控制方程可写为

$$\frac{\hat{u}_m^{\frac{1}{2}} - \sum_k \alpha_k \hat{u}_m^{n-k}}{\Delta t} = - \sum_k \zeta_k F_m^{n-k} \quad (8)$$

$$\frac{\hat{u}_m^{\frac{2}{2}} - \hat{u}_m^{\frac{1}{2}}}{\Delta t} = - \frac{m \hat{p}_m^{n+1}}{\nabla} \quad (9)$$

$$\frac{\gamma_0 \hat{u}_m^{n+1} - \hat{u}_m^{\frac{2}{2}}}{\Delta t} = \frac{1}{Re} \frac{m^2 \hat{u}_m^{n+1}}{\nabla} + \lambda(x, t) (\hat{u}_e - \hat{u}_m^{n+1}) \quad (10)$$

其中: $\hat{u}_m^{\frac{1}{2}}, \hat{u}_m^{\frac{2}{2}}$ 为中间变量, α, ζ, γ_0 是适当系数,要求的精度不同取不同的值.

本文程序是按照如下方法启动的:先用短时间步长开始,算出二十个时间步长后,再用基本时间步长进行计算.短时间步长取基本时间步长的十分之一,短时间步长的第一步用单步法,第二步用两步法,第三步及以后的时间步均用三步法.表 1 给出了一步、两步、三步法的系数.

为了满足连续性方程,式(9)可以分裂为两项,即

$$\frac{m \cdot \hat{u}_m^{\frac{1}{2}}}{\nabla} = \frac{m \hat{p}_m^{n+1}}{\Delta t} \quad (11)$$

$$\hat{u}_m^{\frac{2}{2}} = \hat{u}_m^{\frac{1}{2}} - \Delta t \frac{m \hat{p}_m^{n+1}}{\nabla} \quad (12)$$

表 1 时间混合显-隐格式的系数

Table 1 Coefficients of explicit-implicit mixed scheme for time							
系数	γ_0	α	α	α	ζ_0	ζ_1	ζ_2
一步(一阶精度)	1	1	0	0	1	0	0
两步(二阶精度)	3/2	2	- 1/2	0	2	- 1	0
三步(三阶精度)	11/6	3	- 3/2	1/3	3	- 3	1

2.2 空间的离散

2.2.1 对流项的离散

本文采用傅德薰、马延文^[8]建议的五阶迎风紧致有限差分格式计算速度导数. 设 $E_m = \frac{\partial \psi_m}{\partial x}$, 则对于中间点, 有

$$\begin{cases} 2E_{i-1,j,m}^+ + 3E_{i,j,m}^+ = (-\psi_{i+2,j,m} + 12\psi_{i+1,j,m} + \\ 36\psi_{i,j,m} - 44\psi_{i-1,j,m} - 3\psi_{i-2,j,m}) / (12\Delta x) \\ 3E_{i,j,m}^- + 2E_{i+1,j,m}^- = (-\psi_{i-2,j,m} + 12\psi_{i-1,j,m} + \\ 36\psi_{i,j,m} - 44\psi_{i+1,j,m} - 3\psi_{i+2,j,m}) / (12\Delta x) \end{cases} \quad (13)$$

在邻近边界点, 采用三阶精度的紧致有限差分格式; 在边界点, 采用二阶精度的单边插值格式.

对于扰动的线性项, 类似 $U \frac{\partial \psi_m}{\partial x}$ 的项, 令 $E_m = \frac{\partial \psi_m}{\partial x}$, 首先在谱空间利用 (13) 式求出 E_m^+ , 在谱空间将 U 与 E_m^+ 相乘, 得到 $U \frac{\partial \psi_m}{\partial x}$. 对于非线性项, 以 $\left(u \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_m$ 为例, 仍令 $E_m = \frac{\partial \psi_m}{\partial x}$, 首先在谱空间计算出 E_m^+ , E_m^- , 然后将 u 和 E_m^+ , E_m^- 都变换到物理空间, 得到 u 和 E^+ , E^- . 按

$$u \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{u + |u|}{2} E^+ + \frac{u - |u|}{2} E^- \quad (14)$$

在物理空间中计算 $u \frac{\partial \psi}{\partial x}$, 然后将 $u \frac{\partial \psi}{\partial x}$ 变换回谱空间, 得到 $\left(u \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_m$.

2.2.2 压力项的离散

令 $Q = m^2 \beta$, $\phi = p_m$, $f = \frac{\nabla_m \cdot \hat{u}_m}{\Delta t}$, 则压力满足的方程式 (11) 可以写为 Helmholtz 方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - Q \cdot \phi = f \quad (15)$$

在流向, 由 Lele^[9] 的文章可得二阶导数四阶精度的对称紧致有限差分格式为

$$\xi \phi_{i-1,j}'' + \phi_{i,j}'' + \xi \phi_{i+1,j}'' = K(\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}) \quad (16)$$

其中 $\xi = 1/10$, $K = 12/(10\Delta x^2)$.

由于在 y 方向采用不等间距离散, 因此, 需先推导出法向非等间距网格二阶导数三阶精度的紧致有限差分格式. 考虑在 j 点进行离散, 设 $r_j = y_{j+1} - y_j$, $q_j = y_j - y_{j-1}$, 则差分格式写为

$$\begin{aligned} A_j \cdot \phi_{j-1}'' + B_j \cdot \phi_j'' + C_j \cdot \phi_{j+1}'' = \\ a_j \cdot \phi_{j-1} - b_j \cdot \phi_j + c_j \cdot \phi_{j+1} \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} A_j &= r_j^3 - q_j \cdot r_j^2 - q_j^2 \cdot r_j, \\ B_j &= -q_j^3 - 4q_j^2 \cdot r_j - 4q_j \cdot r_j^2 - r_j^3, \\ C_j &= q_j^3 - q_j^2 \cdot r_j - q_j \cdot r_j^2, a_j = -12r_j, \\ b_j &= -12q_j - 12r_j, c_j = -12q_j. \end{aligned}$$

于是, 可得非等间距网格 Helmholtz 方程的离散形式为

$$\begin{aligned} \left[\left(Q + \frac{12}{\Delta x^2} \right) A_j + a_j \right] (\phi_{i-1,j-1} + \phi_{i+1,j-1}) + \\ \left[\left(Q + \frac{12}{\Delta x^2} \right) B_j - b_j \right] (\phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j}) + \\ \left[\left(Q + \frac{12}{\Delta x^2} \right) C_j + c_j \right] (\phi_{i-1,j+1} + \phi_{i+1,j+1}) + \\ \left[10Q - \frac{24}{\Delta x^2} \right] (A_j \phi_{i,j-1} + B_j \phi_{i,j} + C_j \phi_{i,j+1}) + \\ 10(a_j \phi_{i,j-1} - b_j \phi_{i,j} + c_j \phi_{i,j+1}) = \\ A_j (f_{i-1,j-1} + f_{i+1,j-1}) + B_j (f_{i-1,j} + f_{i+1,j}) + \\ C_j (f_{i-1,j+1} + f_{i+1,j+1}) + 10(A_j f_{i,j-1} + B_j f_{i,j} + C_j f_{i,j+1}) \end{aligned} \quad (18)$$

针对式 (18), 本文采用逐次超松弛迭代法对其求解, 超松弛因子取为 1.60, 收敛精度为 2×10^{-8} .

2.2.3 粘性项的离散

将式 (10) 写成

$$\frac{\lambda_0 \hat{u}_{i,j,m}^{n+1} - \hat{u}_{i,j,m}^3}{\Delta t} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_{i,j,m}^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_{i,j,m}^{n+1}}{\partial y^2} - m^2 \beta \hat{u}_{i,j,m}^{n+1} \right) + \lambda(x, t) (\hat{u}_e - \hat{u}_{i,j,m}^{n+1}) \quad (19)$$

若令 $H = \lambda_0 + \lambda(x, t) \cdot \Delta t$, $S = \frac{\Delta t}{Re \cdot H}$, 由于 S 较小, 则式 (19) 可以近似地改写成

$$\left(1 - \frac{S}{1 + SQ} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(1 - \frac{S}{1 + SQ} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \hat{u}_{i,j,m}^{n+1} = \frac{\hat{u}_{i,j,m}^3}{H(1 + SQ)} \quad (20)$$

令 $\psi_i = \left(1 - G \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \hat{u}_{i,j,m}^{n+1}$, 则式 (20) 可以分为两步求解

$$\left(1 - G \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi_i = g_i \quad (21)$$

$$\left(1 - G \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \hat{u}_{i,j,m}^{n+1} = \psi_i \quad (22)$$

其中 $g_i = \frac{\hat{u}_{i,j,m}^3}{H(1 + SQ)}$, $G = \frac{S}{1 + SQ}$, 利用 (16) 式可得方程 (21) 的离散方程为

$$\begin{aligned} & (\xi - K \cdot G) \psi_{i-1} + (1 + 2K \cdot G) \psi_i + \\ & (\xi - K \cdot G) \psi_{i+1} = \xi \cdot g_{i-1} + g_i + \xi \cdot g_{i+1} \end{aligned} \quad (23)$$

对于给定的 g_i 和 ψ_i (i 为流向点数), 利用追赶法, 可以求解出 ψ .

利用差分格式(17)求解方程(22), 其离散方程为

$$\begin{aligned} & (A_j - a_j \cdot G) \cdot \hat{u}_{i,j-1,m}^{n+1} + (B_j + b_j \cdot G) \cdot \hat{u}_{i,j,m}^{n+1} + \\ & (1 - c_j \cdot G) \cdot \hat{u}_{i,j+1,m}^{n+1} = \frac{1}{H(1 + SQ)} \cdot \\ & (A_j \cdot \psi_{i-1} + B_j \cdot \psi_i + C_j \cdot \psi_{i+1}) \end{aligned} \quad (24)$$

给定 ψ_i 和边界条件, 利用追赶法, 可以解出 $\hat{u}_{i,j,m}^{n+1}$ 的值.

在边界点, 我们采用二阶精度的单边差分格式离散方程(22).

入口、出口上、下端点的计算公式

$$\begin{aligned} \hat{u}_{1,jn,m}'' &= h_0 \cdot \hat{u}_{1,jn,m} + h_1 \cdot \hat{u}_{1,jn-1,m} + \\ & h_2 \cdot \hat{u}_{1,jn-2,m} + h_3 \cdot \hat{u}_{1,jn-3,m} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_{1,1,m}'' &= h_0 \cdot \hat{u}_{1,1,m} + h_1 \cdot \hat{u}_{1,2,m} + \\ & h_2 \cdot \hat{u}_{1,3,m} + h_3 \cdot \hat{u}_{1,4,m} \end{aligned} \quad (26)$$

其中, jn 为法向点数. 若在上端点令 $\Delta y_1 = y_{jn} - y_{jn-1}$, $\Delta y_2 = y_{jn} - y_{jn-2}$, $\Delta y_3 = y_{jn} - y_{jn-3}$, 在下端点令 $\Delta y_1 = y_2 - y_1$, $\Delta y_2 = y_3 - y_1$, $\Delta y_3 = y_4 - y_1$, 则在(25)式和(26)式中的系数为

$$\begin{aligned} h_0 &= -(h_1 + h_2 + h_3), \\ h_1 &= \frac{2(\Delta y_2^2 - \Delta y_3^2)}{\Delta y_1 h^*}, h_2 = \frac{2(\Delta y_3^2 - \Delta y_1^2)}{\Delta y_2 h^*}, \\ h_3 &= \frac{2(\Delta y_1^2 - \Delta y_2^2)}{\Delta y_3 h^*}, h^* = \Delta y_1 (\Delta y_2^2 - \Delta y_3^2) + \\ & \Delta y_2 (\Delta y_3^2 - \Delta y_1^2) + \Delta y_3 (\Delta y_1^2 - \Delta y_2^2) \end{aligned}$$

2.2.4 散度和梯度的离散

在式(11)中需要求解速度散度 $\nabla_m \cdot \hat{u}_m^\perp$, 在式(12)中需要求解压力梯度 $\nabla_m p_m^{n+1}$. 散度和梯度虽然性质上不同, 但形式上都是空间变量的一阶偏导数, 只不过散度是标量, 梯度是矢量而已. 因此, 我们对于散度、梯度的每项偏导数取相同的格式离散. 这里仅讨论散度的紧致有限差分格式, 对于梯度离散省略. 设 $E_m = \frac{\partial \hat{u}_m}{\partial x}$, 则对于中间点, 采用六阶精度的对称紧致有限差分格式

$$\begin{aligned} & \hat{E}_{i+1,j,m} + 3\hat{E}_{i,j,m} + \hat{E}_{i-1,j,m} = \\ & \frac{1}{12\Delta x} (\hat{u}_{i+2,j,m} - \hat{u}_{i-2,j,m}) + \frac{7}{3\Delta x} (\hat{u}_{i+1,j,m} - \hat{u}_{i-1,j,m}) \end{aligned} \quad (27)$$

在邻近边界点, 采用四阶精度的对称紧致格式; 在边界点, 采用三阶精度的紧致有限差分格式.

2.2.5 y 方向的坐标变换

在 y 方向采用非等间距网格, 其形式为

$$y_j = \frac{L_y \cdot \eta}{1 + C_b \cdot (1 - \eta^2)} \quad (28)$$

其中 $\eta = \frac{j-1}{jn-1}$, η 为计算坐标, $\eta \in [0, 1]$; $C_b = \frac{\sqrt{1+8k_2}-3}{4}$; $k_2 = \frac{y_{in}-y_{in-1}}{y_2-y_1}$, 表示两端坐标网格间距的比.

2.2.6 边界条件

压力采用方向导数为零的边界条件, 即上、下边界条件: $\frac{\partial p_m}{\partial y} = 0$; 入口、出口边界条件: $\frac{\partial p_m}{\partial x} = 0$. 另外, 在 $m=0$ 处, 需在边界的某一个点压力取常数, 本文取 $p_{0,12,0} = 0$.

速度的出流边界条件采用嵌边法^[10-11]. 本文中采用的嵌边函数 $\lambda(x, t)$ 与 Lundbladh 等人^[12] 所推荐的非常相近, 该方法是通过 Navier-Stokes 方程增加一项特殊的源项 $\lambda(x, t) (\hat{u}_e - \hat{u}_m)$ 来实现, 其中 $\hat{u}_m$ 为要求解的未知速度场, 嵌边函数 $\lambda(x, t)$ 为非负数函数, $\lambda(x, t)$ 不为零的区域称为嵌边区. 在需要的时候, 嵌边函数还可以是时间函数, 使嵌边区随着时间在空间移动.

本文采用的嵌边函数的示意图如图 2 所示, 其中, 嵌边区位于 x_{start} 和 x_{end} 之间, 嵌边区长度 $L_f = x_{end} - x_{start}$, λ_{max} 为嵌边函数的最大值, 在 Δ_{rise} 内, $\lambda(x, t)$ 由零升至最大值. 计算中的 $\Delta_{rise} = \frac{5}{16} L_f$.

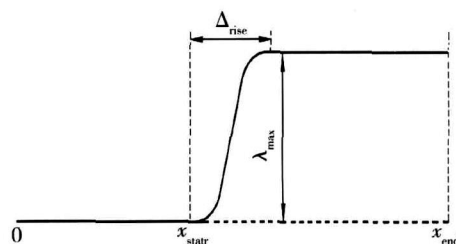


图 2 嵌边函数示意图

Fig. 2 Schematic diagram of fringe function

嵌边函数的解析表达式为

$$\lambda(x, t) = \lambda_{max} R\left(\frac{x - x_{start}(t)}{\Delta_{rise}}\right) \quad (29)$$

式中的形函数 $R(x)$ 为

$$R(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0 \\ \frac{1}{2}[\tanh(7x-4)+1], & 0<x<1 \\ 1, & x\geq 1\end{cases}\tag{30}$$

本文中 L_f 取 69.3, $\lambda_{\max}$ 取 0.18.
扰动速度的上边界条件为零,下边界条件为无滑移边界条件,入口边界条件为给定扰动.

3 实例分析

3.1 流动稳定性分析

在流动稳定性分析中,把 u, v, w, p 的扰动部分设为行进波的形式

$$\begin{cases} u = A_{mp} u(y) e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} + c. c. \\ v = A_{mp} v(y) e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} + c. c. \\ w = A_{mp} w(y) e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} + c. c. \\ p = A_{mp} p(y) e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} + c. c. \end{cases}\tag{31}$$

式中 α 表示流向波数; ω 表示频率.
把式(31)代入式(1),整理并略去扰动波的非

线性项的影响,再消去 u, w 和 p ,可得到关于 v 的方程

$$\begin{aligned} &\left[\frac{1}{Re}(D^2 - \bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2) - i(\bar{\alpha} \bar{u} + \bar{\beta} \bar{w} - \omega)\right. \\ &\quad \left.(D^2 - \bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2) + i\omega D^2 \bar{u} + i\beta D^2 \bar{w}\right] v = 0 \end{aligned}\tag{32}$$

其中: $D = d/dy$, $\bar{u}$ 和 $\bar{w}$ 为平均流的解,边界条件为 $v = Dv = 0$,在边界点处,方程(32)与边界条件构成一个特征值问题,从而可以求出特征值 α 和特征函数 v ,然后确定特征函数 u, w 和 p .

3.2 数值结果

在计算域入口处引入扰动.扰动为一个三维 T-S 波,形式如下

$$A_{mp} u(y) e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)}\tag{33}$$

其中 A_{mp} 是扰动幅值. $u(y)$ 是扰动速度剖面,由 Orr-Sommerfeld 方程特征值问题得到,其归一化条件为 $\max |u| = 1$. 具体参数:雷诺数 $Re = 1\,017.9$;频率 $\omega = 0.06$;展向波数 $\beta = 0.05$;流向波数 $\alpha = (0.181\,422\,3, -0.002\,045\,5)$; $A_{mp} = 0.000\,1$.

扰动速度的分布如图 3 所示.

流向计算域长度取为 $L_x = 519.5$,法向计算域长度为 $L_y = 35$,法向比例系数 $k_2 = 50$,展向计

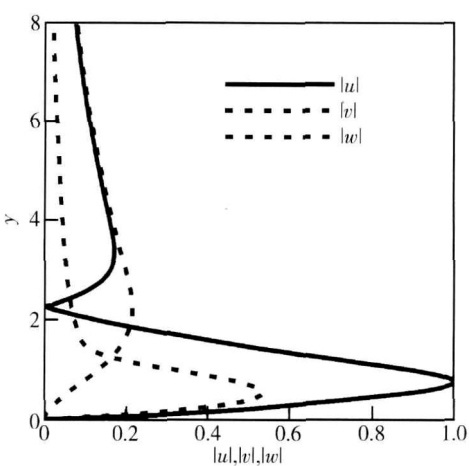


图 3 三维 T-S 波入口扰动速度分布
Fig.3 Distribution of 3D T-S wave's disturbance velocity at the entrance

算域长度为 $L_z = 125.7$,时间步长 $\Delta t = T/1\,000 = 0.105$,其中周期 $T = 2\pi/\omega$ 计算网格数 $in \times jn \times kn = 300 \times 151 \times 32$. 本文计算了 20 个周期,即 $t = 20T = 2.094$ 无量纲时间,其结果见图 4,图 5,图 6,其中 DNS 表示本文的计算结果,LST 表示流动稳定性分析的结果.

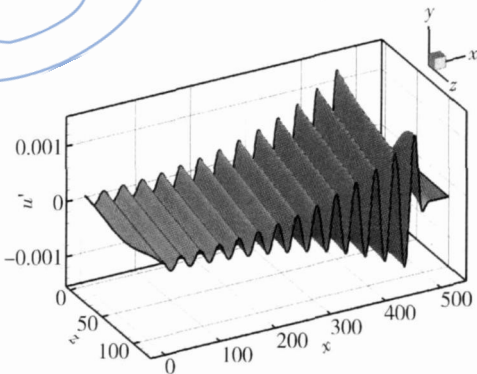


图 4 $y = 0.76$ 处,扰动速度 u 的演化
Fig.4 Evolution of disturbance velocity u at $y = 0.76$

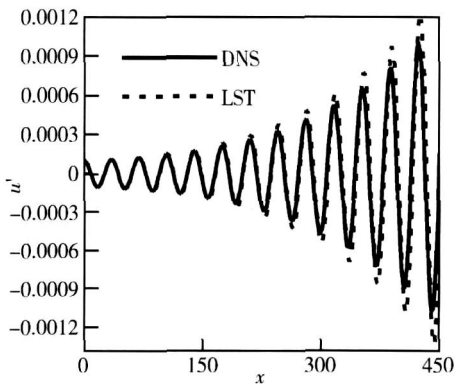


图 5 $y = 0.76, z = 0$ 处,扰动幅值与理论值对比
Fig.5 Comparison of amplitudes of disturbance with results from LST at $y = 0.76, z = 0$

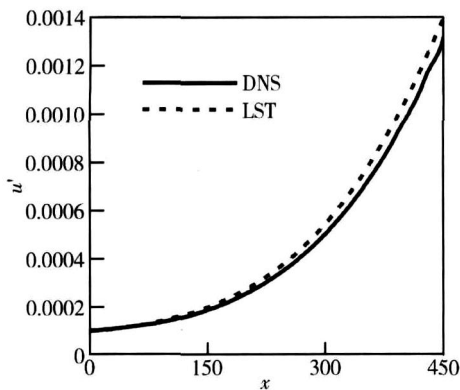


图 6 一周期内最大扰动幅值对比

Fig. 6 Comparison of max amplitudes of disturbance in one period with results from LST

从图 4 可以看出三维 T-S 波在空间的演化情况.从图 5,图 6 的比较结果可以看出,在小扰动的情况下,本程序的计算结果符合流动稳定性分析的结果.

4 结 论

针对不可压缩平板边界层问题,本文采用 Fourier 伪谱方法和高精度紧致差分格式相结合的方法,直接数值模拟了三维不稳定 T-S 波随空间传播演化的过程.从数值实验的结果可以看出,本程序的计算结果符合流动稳定性分析的结果,说明本文的方法对于不可压缩平板边界层问题是正确的.另外,压力项 Helmholtz 方程的迭代精度为 2×10^{-8} ,时间离散和空间离散均采用高精度格式,这都说明了该方法的收敛精度高、分辨率好,因此,本文方法为层流到湍流的转捩和湍流运动的研究提供了一种良好的模拟手段.

参考文献:

[1] 王新军,罗纪生,周恒.平面槽道中层流-湍流转捩的“breakdown”过程的内在机理[J].中国科学:G辑,2005,35(1):71-78.
WANG Xinjun, LUO Jisheng, ZHOU Heng. Inherent mechanism of breakdown in laminar-turbulent transition of channel flow[J]. Science in China:Series G, 2005, 35(1):71-78.

[2] Rist U, Fasel H. Direct numerical simulation of controlled transition in a flat-plate boundary layer[J]. J Fluid Mech, 1995, (298): 211-248.
[3] Liu C, Liu Z. Multigrid mapping box relaxation for simulation of the whole process of flow transition in 3D boundary layer[J]. J Compute Phys, 1995, (119): 325-341.
[4] Wang Z, Yeo K S, Khoo B C. Spatial direct numerical simulation of transitional boundary layer over compliant surfaces[J]. Computers & Fluids, 2005, (34): 1062-1095.
[5] 杨琳,邹正平,宁方飞,等.边界层转捩的数值模拟[J].航空动力学报,2005,20(3):355-360.
YANG Lin, ZOU Zhengping, NING Fangfei, et al. Simulation of boundary layer transition[J]. Journal of Aerospace Power, 2005, 20(3): 355-360.
[6] 周恒.新世纪对流体力学提出的要求[J].自然科学进展,2000,10(6):491-494.
ZHOU Heng. The expectation for fluid mechanics in 21st century[J]. Progress in Natural Science, 2000, 10(6): 491-494.
[7] Karniadakis G E, Israeli M, Orszag S A. High-order splitting methods for the incompressible navier-stokes equations[J]. Journal of Computational Physics, 1991, (97): 414-443.
[8] 傅德薰,马延文.平面混合流拟序结构的直接数值模拟[J].中国科学:A辑,1996,26(7):657-664.
FU Dexun, MA Yanwen. Numerical Simulation of Coherent Structure in Two-dimensional Compressible Mixing Layers[J]. Science in China:Series A, 1996, 26(7):657-664.
[9] Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution[J]. J Comp Phys, 1992, 103: 16-43.
[10] Kloker M, Konzelmann U, Fasel H. Outflow boundary conditions for spatial navier-stokes simulations of transition boundary layers[J]. AIAA Journal, 1993, 31(4): 620-628.
[11] 苏彩虹.嵌边法出流条件在可压缩流直接数值模拟中的应用[D].天津:天津大学,2005.
SU Caihong. The application of fringe method as the outflow boundary condition for the direct numerical simulation of compressible flows[D]. Tianjing:Tianjing University,2005.
[12] Lundbladh A, Schmid P J, Berlin S, et al. Simulation of bypass transition for spatially evolving disturbances[J]. In AGARD CP-551, 1994, 18: 1-13.